Corrigé

1. a. D'une étape à l'autre, on noircit $\frac{1}{9}$ de la surface verte restante.

   b. Si à l'étape n, la surface noircie est A_n alors la surface verte restante est $1 - A_n$.
   Or, comme à chaque étape on noircit $\frac{1}{9}$ de la surface verte restante on a, pour tout entier $n \geqslant 1$, $A_{n+1} = A_n + \frac{1}{9}(1 - A_n) = A_n + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}A_n = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$.

2. a. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $B_{n+1} = A_{n+1} - 1$
   $= \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9} - 1$
   $= \frac{8}{9}A_n - \frac{8}{9}$
   $= \frac{8}{9}(A_n - 1)$
   $= \frac{8}{9}B_n$.
   Donc (B_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{8}{9}$ et de premier terme $B_1 = A_1 - 1 = -\frac{8}{9}$.

   b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $B_n = B_1 \times q^{n-1} = -\frac{8}{9} \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = -\left(\frac{8}{9}\right)^n$.

   c. D'où $A_n = B_n + 1 = -\left(\frac{8}{9}\right)^n + 1$.

   d. Comme $-1 < \frac{8}{9} < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$.
   D'où, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -\left(\frac{8}{9}\right)^n + 1 = 1$.